۲

ریاضیات ضروری

یادگیری زبان یک رشته علمی نخستین گام یک دانشجو برای ذیصلاح شدن در آن رشته است. زبان مکانیک محیط‌های پیوسته، جبر و حساب **تانسورها**[۱] است. در اینجا تانسور یک نام عمومی برای ماهیت‌های ریاضی است که برای ارائه کمیت‌های فیزیکی مهم مکانیک محیط‌های پیوسته، مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک تانسور یا انتقال خطی، هر بردار $\boldsymbol{v}$ را به بردار دیگر $\mathbf{T}\boldsymbol{v}$ به‌صورت

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \mathbf{T}\boldsymbol{v} + \mathbf{T}\boldsymbol{w} \ , \qquad (۱.۲ \text{ الف})$$

و

$$\mathbf{T}(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\mathbf{T}\boldsymbol{v} \qquad (۱.۲ \text{ ب})$$

برای هر $\boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{w}$ نسبت می‌دهد. بنابراین جمع دو تانسور و ضرب اسکالر یک تانسور، به این صورت تعریف می‌شود

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})\boldsymbol{v} = \mathbf{T}\boldsymbol{v} + \mathbf{S}\boldsymbol{v} \ , \qquad (۱.۲ \text{ ج})$$

و

$$(\alpha\mathbf{T})\boldsymbol{v} = \alpha(\mathbf{T}\boldsymbol{v}) \ . \qquad (۱.۲ \text{ د})$$

به علت این خواص، تانسورها یک فضای برداری را شکل می‌دهند.

تانسورها خاصیت بسیار مفیدی به‌واسطه انتقال از یک مبنا (چارچوب مرجع[۲]) به مبنای دیگر دارند. با داشتن یک تانسور که نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف شده است، کمیت (مؤلفه‌های) این تانسور می‌تواند در هر چارچوب مرجع قابل‌قبول، نوشته شود. یک نمونه از این، می‌تواند تنش تعریف‌شده با مؤلفه‌های اصلی و غیر اصلی باشد که هر دو مربوط به یک تانسور تنش یکسان هستند، اگرچه تک‌تک مؤلفه‌ها می‌توانند متفاوت باشند. با فرض اینکه ارتباط بین چارچوب‌های مرجع شناخته شده است، می‌توان مؤلفه‌های متناسب با یک چارچوب را نسبت به چارچوب دیگر پیدا کرد.

---

۱ - Tensor　　　　۲ - Reference Frame

در این کتاب فقط آن دسته از تانسورها استفاده‌شده‌اند که معروف به **تانسورهای دکارتی**[۱] هستند و تعریف آن‌ها در صفحه‌های بعدی ارائه خواهد شد. نمادگذاری عمومی تانسورها، به‌طور کامل در ضمیمه آورده شده است، اما ضرورتی برای متن اصلی کتاب ندارد. معادلات تانسوری به‌کاررفته برای توسعه نظریه بنیادی مکانیک محیط‌های پیوسته، در دو نمادگذاری متمایز، **نمادگذاری نمادین**[۲] یا **نمادگذاری اندیسی**[۳] نوشته می‌شوند. می‌توان از هر دو نوع نمادگذاری استفاده کرد، بسته به اینکه کدام برای استخراج یا تحلیل موضوع راحت‌تر است، اما باید به ارتباط داخلی بین آن دو نوع نمادگذاری توجه داشت. به‌هرحال در اغلب متون سعی شده است که بر نمادگذاری اندیسی تأکید شود. در یک دوره مقدماتی باید نمادگذاری اندیسی به دانشجویانی که ممکن است آگاهی کمی از پیش به این موضوع داشته باشند، آموزش داده شود.

۱.۲ اسکالرها، بردارها و تانسورهای دکارتی

تعداد قابل‌ملاحظه‌ای از کمیت‌های فیزیکی و هندسی، نقش مهمی در مکانیک محیط‌های پیوسته دارند و خوشبختانه هر یک از آن‌ها را می‌توان با نوعی از تانسورها نمایش داد. برای مثال کمیت‌هایی نظیر **چگالی** و **درجه حرارت** ممکن است با ارائه مقدار آن‌ها، به‌طور کامل مشخص شوند، یعنی با یک مقدار عددی بیان شوند. این کمیت‌ها از لحاظ ریاضی با اسکالرها[۴] نمایش داده می‌شوند، که به آن‌ها **تانسورهای مرتبه صفر**[۵] می‌گویند. لازم به تأکید است که اسکالرها ثابت نیستند، اما در واقع می‌توانند توابعی از موقعیت و یا زمان باشند. هم‌چنین مقدار عددی دقیق یک اسکالر بستگی به واحدهایی دارد که در آن بیان می‌شود. بنابراین درجه حرارت در یک موقعیت خاص، ممکن است با ۶۸°F یا ۲۰ °C ارائه شود. به‌عنوان یک قانون کلی، حروف یونانی کوچک که به‌صورت کج نوشته شوند، نظیر α، β، λ و ... به‌عنوان نماد برای اسکالرها در هر دو نمادگذاری اندیسی یا نمادین استفاده خواهند شد.

چندین کمیت فیزیکی مکانیک نظیر نیرو و سرعت، نه فقط به تعیین مقدار، بلکه علاوه بر آن به یک جهت مشخص برای توصیف کامل خود نیاز دارند. به‌عنوان یک مثال ابتدایی، یک نیروی ۲۰ N که به‌صورت عمودی به یک نقطه وارد می‌شود به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای متفاوت با یک نیروی

۱ - Cartesian Tensors

۲ - Symbolic Notation

۳ - Indicial Notation

۴ - Scalar

۵ - Zero-Order Tensor

N ۲۰ وارد بر آن نقطه در جهت افقی است. کمیت‌هایی که دارای چنین خواص جهت‌دار هستند، توسط بردارها[۱] که **تانسورهای مرتبه اول**[۲] می‌باشند، نمایش داده می‌شوند. به لحاظ هندسی، بردارها را عموماً با **پیکان**[۳] نشان می‌دهند، که دارای یک طول معین (اندازه)، یک راستای مشخص (امتداد) و یک جهت عمل هستند که با سر و انتهای پیکان مشخص می‌شود. در این کتاب طول پیکان‌ها با مقیاس اندازه بردارها ترسیم نشده است. کمیت‌های خاص در مکانیک، برای مثال دوران‌های کوچک که در واقع بردار نیستند نیز با پیکان نمایش داده می‌شوند.

در نتیجه، علاوه بر مشخصه اندازه و جهت، تعریف کامل یک بردار، گزاره‌های بیشتری نیاز دارد: جمع (و تفریق) بردارها، که با قانون مثلث بیان می‌شود، به‌طوری که بردار حاصل از جمع دو بردار، پیکانی است که از ابتدای بردار اول تا انتهای بردار دوم کشیده می‌شود، وقتی که این بردارها «سر به ته» وصل شده باشند.

هر چند بردارها از هر دستگاه مختصات خاصی مستقل هستند، اغلب مفید است که یک بردار برحسب مؤلفه‌های مختصاتی خود تعریف شود. از دید محدودیت ما که منحصر به تانسورهای دکارتی است، خودمان را به بررسی دستگاه‌های مختصات دکارتی برای مشخص کردن مؤلفه‌های یک بردار، محدود می‌کنیم.

شمار قابل‌ملاحظه‌ای از کمیت‌های فیزیکی دارای جایگاه مهمی در مکانیک محیط‌های پیوسته هستند که برای بیان آن‌ها، به ماهیت‌های ریاضی مرتبه بالاتر از بردارها نیاز می‌باشد که در حیطه تانسورها قرار می‌گیرند. همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، معروف‌ترین آن‌ها، تانسورهای تنش و کرنش هستند. این تانسورهای خاص، **تانسورهای مرتبه دوم**[۴] هستند و گفته می‌شود که دارای رتبه[۵] دو می‌باشند. تانسورهای مرتبه سوم و مرتبه چهارم در مکانیک محیط‌های پیوسته غیر رایج نیستند اما حضورشان به فراوانی تانسورهای مرتبه دوم نیست. ازاین‌رو استفاده بدون شرط از کلمه **تانسور** در این کتاب، به معنی **تانسور مرتبه دوم** است. فقط با چند مورد استثناء، اغلب در نمایش تانسورهای تنش و کرنش، تانسورهای مرتبه دوم را با حروف لاتین بزرگ به‌صورت سیاه نمایش می‌دهیم، یک مثال شاخص آن تانسور $\mathbf{T}$ است. مؤلفه‌های تانسور بیان‌شده، عموماً با حروف کوچک لاتین، با اندیس‌های مربوطه نشان داده می‌شوند: t_{ij}.

تانسورها مانند بردارها، مستقل از هر دستگاه مختصات هستند، اما مانند بردارها هرگاه بخواهیم

۱ - Vector
۲ - First-Order Tensor
۳ - Arrow
۴ - Second-Order Tensor
۵ - Rank

یک تانسور را با مؤلفه‌هایش مشخص کنیم، مجبوریم به یک مجموعه مناسب از محورهای مرجع، ارجاع دهیم. در ادامه، تعاریف دقیق تانسورهای با مرتبه مختلف، برحسب خواص انتقال مؤلفه‌هایشان بین دو مجموعه مرتبط از محورهای مختصات دکارتی، ارائه خواهند شد.

به‌عنوان مروری سریع بر نمادگذاری، سازمان استاندارد بین‌المللی (ISO) قراردادی برای حروف‌چینی ریاضی ارائه داده که به‌صورت زیر خلاصه شده است:

۱. متغیرهای اسکالر با حروف کج نوشته می‌شوند. این حروف می‌توانند بسته به کمیت‌های فیزیکی که نشان می‌دهند، با فونت‌های Roman یا یونانی باشند. مثال‌های زیر بخشی از لیست نمادگذاری اسکالر هستند:

الف) a - اندازه شتاب
ب) v - اندازه سرعت
ج) r - شعاع
د) θ - درجه حرارت یا زاویه، با توجه به متن
ه) α - ضریب انبساط حرارتی
و) σ - مقدار اصلی تنش
ز) λ - مقدار ویژه یا اتساع

۲. بردارها به‌صورت کج و سیاه نوشته می‌شوند. به‌صورت مثال‌های زیر:

الف) $\boldsymbol{x}$ - موقعیت
ب) $\boldsymbol{v}$ - سرعت
ج) $\boldsymbol{a}$ - شتاب
د) $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ - بردار مبنا در جهت x_1

۳. تانسورهای مرتبه دوم و بالاتر با فونت‌های بزرگ نوشته می‌شوند. به‌علاوه، ماتریس‌ها برای تمایز با تانسورها، به فرم شکسته نشان داده می‌شوند. تانسورها می‌توانند با ماتریس‌ها نمایش داده شوند، اما همه ماتریس‌ها تانسور نیستند. این قرارداد، در مورد چند کمیت معروف مهندسی، سازگار نیست. به‌عنوان نمونه، کرنش خطی با ϵ نمایش داده می‌شود. در اینجا چند مثال از نمادهای تانسور و ماتریس بیان شده است:

الف) $\boldsymbol{Q}$ - ماتریس متعامد
ب) $\mathbf{E}$ - کرنش محدود
ج) $\mathbf{T}$ - تانسور تنش کوشی

د) $\boldsymbol{\epsilon}$ - تانسور کرنش کوچک
ه) $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ - ماتریس دوران

۲.۲ جبر تانسوری در نمادگذاری نمادین - قرارداد جمع

فضای فیزیکی سه بعدی زندگی روزمره، فضایی است که بسیاری از وقایع مکانیک محیط‌های پیوسته در آن رخ می‌دهد. به لحاظ ریاضی، این فضا مشهور به فضای سه بعدی اقلیدسی[۱] است و هندسه آن را می‌توان به یک دستگاه محورهای مختصات دکارتی، نسبت داد. در برخی موارد، فضاهای با بُعد بالاتر، نقش جدایی‌ناپذیری در موضوعات محیط پیوسته بازی می‌کنند. چون یک اسکالر فقط یک مؤلفه منفرد دارد، در هر دستگاه محورهای مختصات، همان مقدار را خواهد داشت، اما به‌طور کلی مؤلفه‌های بردارها و تانسورها، برای هر مجموعه از محورهای مختصات، مقادیر مؤلفه‌ای متفاوت خواهند داشت.

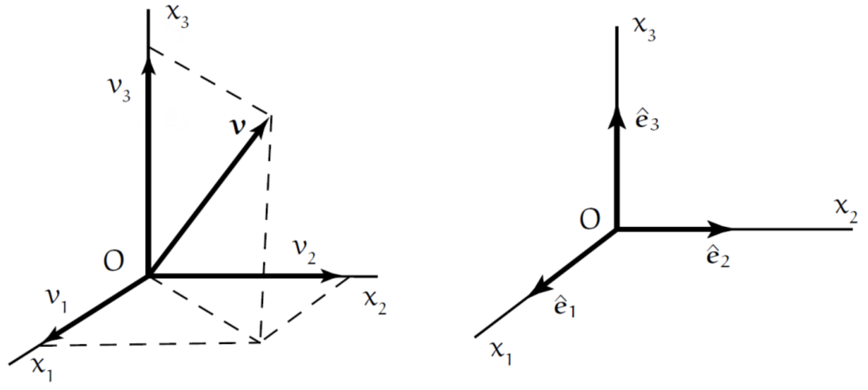
به‌منظور نمایش بردارها و تانسورها در شکل مؤلفه‌ای، در فضای فیزیکی خودمان یک دستگاه راست‌گرد از محورهای مختصات دکارتی مستطیلی $Ox_۱x_۲x_۳$، معرفی می‌کنیم و برای این محورها، بردارهای مبنای یکه[۲] سه‌گانه $\hat{\boldsymbol{e}}_۱$، $\hat{\boldsymbol{e}}_۲$، $\hat{\boldsymbol{e}}_۳$، را مطابق شکل ۱.۲ (الف) مشخص می‌کنیم. کلیه بردارهای یکه در این کتاب با نماد حروف سیاه و یک علامت ^ روی آن‌ها نوشته می‌شوند. به خاطر تعامد دو به دوی این بردارهای مبنا، آن‌ها یک مبنای متعامد[۳] را تشکیل می‌دهند و علاوه بر این، چون آن‌ها بردارهای یکه هستند، مبنا را متعامد یکه[۴] می‌نامند. بر طبق این مبنا، یک بردار دلخواه $\boldsymbol{v}$ در شکل مؤلفه‌ای به‌صورت زیر ارائه می‌شود

$$\boldsymbol{v} = v_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۱ + v_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۲ + v_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۳ = \sum_{i=۱}^{۳} v_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad . \qquad (۲.۲)$$

این بردار و مؤلفه‌های مختصاتی آن در شکل ۱.۲ (ب) نشان داده‌شده‌اند. برای توصیف نمادین، بردارها معمولاً با حروف کوچک لاتین به‌صورت سیاه ارائه می‌شوند و اندازه بردار با همان حرف بیان می‌شود. بنابراین v اندازه $\boldsymbol{v}$ است.

در این مقطع از بحث، معرفی یک روش نمادگذاری معروف به **قرارداد جمع**[۵]، مفید است که

۱ - Euclidean Three-Space
۲ - Unit Base Vector
۳ - Orthogonal Basis
۴ - Orthonormal
۵ - Summation Convention



الف) بردارهای یکه در جهت‌های مختصات $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$

ب) مؤلفه‌های دکارتی مستطیلی از بردار $\boldsymbol{v}$

شکل ۱.۲
بردارهای مبنا و مؤلفه‌های یک بردار دکارتی.

این روش به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای نوشتن معادلات مکانیک محیط‌های پیوسته را ساده می‌کند، به‌طور خلاصه، توافق می‌کنیم هرگاه یک زیرنویس[۱] دقیقاً **دو مرتبه** در یک عبارت ظاهر شود، این زیرنویس به‌طور متوالی مقادیر ۳،۲،۱ را اختیار کند و جملات حاصله با هم جمع شوند. برای مثال با استفاده از این روش می‌توان معادله ۲.۲ را به فرم ساده

$$\boldsymbol{v} = v_{\mathrm{i}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \ , \qquad (۳.۲)$$

نوشت و نماد جمع $\sum$ را به‌طور کامل حذف کرد. در تانسورهای دکارتی، زیرنویس‌ها فقط برای مؤلفه‌ها نیاز هستند. برای تانسورهای عمومی، هر دو زیرنویس و بالانویس[۲] استفاده می‌شود. زیرنویس‌های جمع شونده را **اندیس‌های مکرر**[۳] می‌نامند، زیرا مهم نیست که چه حرف خاصی استفاده شده است. بنابراین وقتی قرارداد جمع استفاده شود، $v_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ کاملاً معادل $v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}$ یا $v_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}$ می‌باشد. توجه نمایید که هیچ زیرنویسی نباید بیش از دو مرتبه در یک عبارت ظاهر گردد. اما همان‌گونه که به‌زودی نشان خواهیم داد، بیش از یک جفت اندیس مکرر می‌تواند در یک عبارت داده‌شده، ظاهر شود که معنی آن، جمع جملات است (رجوع به مثال ۲.۲). هم‌چنین توجه نمایید که قرارداد جمع می‌تواند شامل زیرنویس‌هایی از بردارهای یکه و ضرایب اسکالر باشد.

۱ - Subscript
۲ - Superscript
۳ - Dummy Indices - شاخص کاذب

مثال ۱.۲

روابط زیر را بدون توجه به معانی آن‌ها تا جایی که مربوط به مکانیک است، طبق قرارداد جمع توسعه دهید:

الف) $u_i v_i w_j \hat{\boldsymbol{e}}_j$ ب) $t_{ij} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_i$ ج) $t_{ii} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j$

حل

الف) ابتدا جمع روی i و سپس روی j

$$u_i v_i w_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)(w_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + w_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + w_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

ب) جمع روی i و سپس روی j و جمع جملات روی بردارهای یکه.

$$\begin{aligned} t_{ij} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_i &= t_{1j} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_1 + t_{2j} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_2 + t_{3j} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= (t_{11} v_1 + t_{12} v_2 + t_{13} v_3)\, \hat{\boldsymbol{e}}_1 + (t_{21} v_1 + t_{22} v_2 + t_{23} v_3)\, \hat{\boldsymbol{e}}_2 \\ &\quad + (t_{31} v_1 + t_{32} v_2 + t_{33} v_3)\, \hat{\boldsymbol{e}}_3 \end{aligned}$$

ج) جمع روی i و سپس روی j،

$$t_{ii} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = (t_{11} + t_{22} + t_{33})(v_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

به شباهت بین (الف) و (ب) توجه کنید.

با ذهنیتی از مطالب بالا، اکنون استفاده از نمادگذاری نمادین، برای ارائه چند تعریف سودمند از جبر بردار و تانسور، مقدور است. دو نماد وجود دارد که از ابتدا برای نوشتن جبر بردار و تانسور ضروری هستند. این دو نماد، دلتای کرانکر[1] و نماد جایگشت[2] هستند. علاوه بر این، چند رابطه مفید بین دلتای کرانکر و نماد جایگشت وجود دارد که در همه جای مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شوند. به دنبال آن جبر بردار و تانسور بیان می‌شود.

دلتای کرانکر شبیه ماتریس همانی[3] است، بنابراین خواننده باید این ماهیت جدید را سریعاً بپذیرد. در هر حال، نماد جایگشت کمی مفهومی‌تر از دلتای کرانکر است زیرا نمی‌توان آن را با یک ماتریس نمایش داد. در فصل‌های بعدی، دلتای کرانکر و نماد جایگشت نقش جدایی‌ناپذیری را در توصیف چگونگی اعمال نیروها روی اجسام پیوسته و توصیف موقعیت یک ذره، ایفا خواهند کرد.

۱ - Kronecker Delta
۲ - Permutation Symbol
۳ - Identity Matrix

۱.۲.۲ دلتای کرانکر

ازآنجاکه بردارهای مبنا $\hat{\boldsymbol{e}}_i \; (i = ۱,۲,۳)$، بردارهای یکه و متعامد هستند

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقدار عددی } i = \text{مقدار عددی } j \\ ۰ & \text{اگر مقدار عددی } i \neq \text{مقدار عددی } j \end{cases}$$

بنابراین اگر دلتای کرانکر را به‌صورت زیر معرفی کنیم

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقدار عددی } i = \text{مقدار عددی } j \\ ۰ & \text{اگر مقدار عددی } i \neq \text{مقدار عددی } j \end{cases}$$

می‌بینیم که

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \qquad (i = ۱,۲,۳) \ . \tag{۴.۲}$$

هم‌چنین، توجه نمایید که با قرارداد جمع

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{۱۱} + \delta_{۲۲} + \delta_{۳۳} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ \ ,$$

و علاوه بر آن، به خاصیت جایگزینی دلتای کرانکر توسط بسط (جمع روی j) عبارت زیر توجه می‌نماییم

$$\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{i۱}\hat{\boldsymbol{e}}_۱ + \delta_{i۲}\hat{\boldsymbol{e}}_۲ + \delta_{i۳}\hat{\boldsymbol{e}}_۳ \ .$$

اما برای یک مقدار i داده‌شده در این معادله، فقط یکی از دلتاهای کرانکر در سمت راست معادله، غیر صفر است و مقدار یک دارد. بنابراین

$$\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}_i \ ,$$

و دلتای کرانکر در $\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_j$ موجب جایگزینی زیرنویس j در $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ با i و کاهش عبارت به‌صورت ساده $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ می‌شود.

۲.۲.۲ نماد جایگشت

با معرفی نماد جایگشت ε_{ijk} که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقادیر عددی } ijk \text{ به ترتیب ۱۲۳۱۲ ظاهر شوند} \\ -۱ & \text{اگر مقادیر عددی } ijk \text{ به ترتیب ۳۲۱۳۲ ظاهر شوند} \\ ۰ & \text{اگر مقادیر عددی } ijk \text{ به ترتیب دیگری ظاهر شوند} \end{cases} \tag{۵.۲}$$

می‌توان ضرب برداری بردارهای مبنا $(i = ۱,۲,۳)$ را به کمک معادله ۵.۲ به‌صورت زیر بیان کرد

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{e}}_k \qquad (i, j, k = ۱,۲,۳) \ . \tag{۶.۲}$$

هم‌چنین، از روی تعریف دقت شود که جابه‌جایی هر دو زیرنویس در ε_{ijk} موجب تغییر در علامت می‌شود، برای مثال،

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} \ ,$$

و علاوه بر آن، برای زیرنویس‌های تکراری صفر می‌شود یعنی

$$\varepsilon_{۱۱۳} = \varepsilon_{۲۱۲} = \varepsilon_{۱۳۳} = \varepsilon_{۲۲۲} = ۰ \ .$$

۳.۲.۲ تساوی $\varepsilon - \delta$

ضرب نمادهای جایگشت $\varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq}$ را می‌توان برحسب دلتاهای کرانکر توسط تساوی $\varepsilon - \delta$

$$\varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq} = \delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij} \tag{۷.۲ الف}$$

بیان کرد که با بسط مستقیم قابل‌اثبات است. این یک فرمول بسیار مهم و شایان‌ذکر است که در سرتاسر این کتاب استفاده شده است. هم‌چنین با خاصیت تغییر علامت ε_{ijk}،

$$\varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq} = \varepsilon_{miq}\varepsilon_{qjk} = \varepsilon_{qmi}\varepsilon_{qjk} = \varepsilon_{qmi}\varepsilon_{jkq} \ .$$

به‌علاوه، به آسانی از معادله ۷.۲ (الف) می‌توان نشان داد

$$\varepsilon_{jkq}\varepsilon_{mkq} = ۲\delta_{jm} \ , \tag{۷.۲ ب}$$

با قرار دادن $i = k$ و

$$\varepsilon_{jkq}\varepsilon_{jkq} = ۶ \ . \tag{۷.۲ ج}$$

۴.۲.۲ جبر تانسور و بردار

برای شروع، جمع برداری به آسانی به شکل اندیسی نوشته می‌شود

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad \text{یا} \qquad w_i\hat{\boldsymbol{e}}_i = (u_i + v_i)\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{۸.۲}$$

که مؤلفه‌ها به سادگی با هم دیگر جمع می‌شوند.

ضرب ساده برداری می‌تواند یکی از چند شکل ممکن را داشته باشد. شکل خاص آن، به نوع کمیت ضرب شونده در بردار بستگی دارد. اکنون دو شکل از ضرب برداری را می‌توان به‌صورت نمادین تعریف کرد. ضرب یک بردار با یک اسکالر به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\lambda \boldsymbol{v} = \lambda v_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \ , \tag{۹.۲}$$

و **ضرب نقطه‌ای**[1] **(اسکالر)** بین دو بردار به این صورت است

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = uv \cos \theta \tag{۱۰.۲}$$

که در آن، θ زاویه کوچک‌تر بین دو بردار است وقتی که از یک مبدأ مشترک رسم شوند.

از تعریف δ_{ij} و خاصیت جایگزینی آن، **ضرب نقطه‌ای $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$** می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i v_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \ . \tag{۱۱.۲}$$

توجه نمایید ازآنجاکه ضرب نقطه‌ای یک عملگر برداری است، مؤلفه‌های اسکالر از آن عبور می‌کنند.

ضرب برداری[2] **(ضربدری)** دو بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = (uv \sin \theta) \hat{\boldsymbol{e}}$$

که در آن $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi$، زاویه بین دو بردار است وقتی که از یک مبدأ مشترک رسم شوند و $\hat{\boldsymbol{e}}$ بردار یکه عمود بر صفحه آن دو است به‌طوری که یک چرخش راست‌گرد حول $\hat{\boldsymbol{e}}$ به‌اندازه زاویه θ موجب شود $\boldsymbol{u}$ روی $\boldsymbol{v}$ قرار گیرد.

ضرب برداری را می‌توان برحسب نماد جایگشت (معادله ۵.۲) به‌صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = u_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \times v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i v_j (\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j) = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \hat{\boldsymbol{e}}_k \ . \tag{۱۲.۲}$$

دوباره توجه نمایید که چگونه مؤلفه‌های اسکالر از عملگر ضرب برداری عبور می‌کنند.

سه بردار را می‌توان به دو روش مفید، در هم ضرب نمود. **ضرب اسکالر سه‌گانه**[3] **(ضرب جعبه‌ای)**[4] به‌صورت زیر است

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \ ,$$

یا

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = u_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j \times w_k \hat{\boldsymbol{e}}_k) = u_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \varepsilon_{jkq} v_j w_k \hat{\boldsymbol{e}}_q \tag{۱۳.۲}$$

$$= \varepsilon_{jkq} u_i v_j w_k \delta_{iq} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$$

که در مرحله آخر از هر دو خاصیت جایگزینی δ_{iq} و تغییر علامت ε_{ijk} استفاده شده است. **ضرب**

---

۱ - Dot Product
۲ - Vector Cross Product
۳ - Triple Scalar Product
۴ - Box Product

برداری سه‌گانه[1] مشابه ضرب اسکالر سه‌گانه است

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \times (v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j \times w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k) = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \times (\varepsilon_{jkq}v_jw_k\hat{\boldsymbol{e}}_q) \qquad (۱۴.۲)$$
$$= \varepsilon_{iqm}\varepsilon_{jkq}u_iv_jw_k\hat{\boldsymbol{e}}_m = \varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq}u_iv_jw_k\hat{\boldsymbol{e}}_m$$

که می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})u_iv_jw_k\hat{\boldsymbol{e}}_m \qquad (۱۵.۲)$$
$$= (u_iv_mw_i - u_iv_iw_m)\hat{\boldsymbol{e}}_m = u_iw_iv_m\hat{\boldsymbol{e}}_m - u_iv_iw_m\hat{\boldsymbol{e}}_m \ .$$

مشاهده اندیس‌ها در معادله ۱۵.۲ نشان می‌دهد که

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$$

که تساوی معروفی در جبر بردارها است.

علاوه بر ضرب‌های برداری متعارف بالا، دو بردار می‌توانند در یکدیگر ضرب شده و یک تانسور را نتیجه دهند. تانسور حاصل از دو بردار یک **دیاد**[2] را ایجاد می‌کند

$$\boldsymbol{uv} = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_iv_j\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_iv_j\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (۱۶.۲)$$

که در شکل بسط داده‌شده، جمع اول روی i نتیجه می‌دهد

$$u_iv_j\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_۱v_j\hat{\boldsymbol{e}}_۱\hat{\boldsymbol{e}}_j + u_۲v_j\hat{\boldsymbol{e}}_۲\hat{\boldsymbol{e}}_j + u_۳v_j\hat{\boldsymbol{e}}_۳\hat{\boldsymbol{e}}_j \ ,$$

و سپس جمع روی j نتیجه می‌دهد

$$u_iv_j\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_۱v_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۱ + u_۱v_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۲ + u_۱v_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۳$$
$$+ u_۲v_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۱ + u_۲v_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۲ + u_۲v_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۳ \qquad (۱۷.۲)$$
$$+ u_۳v_۱\hat{\boldsymbol{e}}_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۱ + u_۳v_۲\hat{\boldsymbol{e}}_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۲ + u_۳v_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۳\hat{\boldsymbol{e}}_۳ \ .$$

این جمع نه جمله‌ای را شکل **نه‌تایی دیاد** $\boldsymbol{uv}$ می‌نامند. جمع دیادها به‌صورت زیر

$$\boldsymbol{u}_۱\boldsymbol{v}_۱ + \boldsymbol{u}_۲\boldsymbol{v}_۲ + \cdots + \boldsymbol{u}_N\boldsymbol{v}_N \qquad (۱۸.۲)$$

دیادیک[3] نامیده می‌شود.

اغلب، نمادگذاری رایج دیگری برای ضرب دیاد به‌صورت زیر استفاده می‌شود

---

۱ - Triple Cross Product

۲ - Dyad

۳ - Dyadic

$$\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{b} = a_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes b_j\hat{\boldsymbol{e}}_j = a_i b_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{۱۹.۲}$$

که **ضرب تانسوری** نامیده می‌شود. ضرب تانسوری بردارهای $\boldsymbol{a}$ و $\mathbf{b}$ به این صورت تعریف می‌شود که چگونه $\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{b}$ همه بردارهای $\boldsymbol{u}$ را نگاشت می‌کند

$$(\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{b})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \ . \tag{۲۰.۲}$$

اگر فرض کنیم بردارهای $\boldsymbol{a}$، $\mathbf{b}$ و $\boldsymbol{u}$ بردارهایی از فضای سه بعدی اقلیدسی باشند، شکل بسط یافته ضرب تانسوری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{b})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 u_1 + a_1 b_2 u_2 + a_1 b_3 u_3 \\ a_2 b_1 u_1 + a_2 b_2 u_2 + a_2 b_3 u_3 \\ a_3 b_1 u_1 + a_3 b_2 u_2 + a_3 b_3 u_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \ .\end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

آخرین خط معادله ۲۱.۲ نشان می‌دهد که چرا گاهی اوقات ضرب تانسوری را ضرب خارجی[۱] می‌نامند. البته ضرب داخلی[۲] هم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

خط دوم از معادله ۲۱.۲ نشان می‌دهد که ضرب تانسوری، معادل ضرب دیاد دو بردار است. هر دو نمادگذاری در این کتاب استفاده خواهد شد.

یک دیاد می‌تواند در یک بردار ضرب شود که **ضرب بردار- دیاد**[۳] را می‌دهد

---

۱ - Outer Product

۲ - Inner Product

۳ - Vector-Dyad Product

$$۱.\quad \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\cdot(v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}) = u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} \qquad (۲۲.۲)$$

$$۲.\quad (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}})\cdot w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} = u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \qquad (۲۳.۲)$$

$$۳.\quad \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = (u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\times v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}})w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} = \varepsilon_{\mathrm{ijq}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} \qquad (۲۴.۲)$$

$$۴.\quad (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w} = u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\times w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}) = \varepsilon_{\mathrm{jqk}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}} \qquad (۲۵.۲)$$

(توجه نمایید که در ضرب‌های ردیف ۳ و ۴، مرتبه بردارهای مبنای $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ مهم است.)

دیادها می‌توانند در یکدیگر ضرب شده و یک دیاد دیگر را نتیجه دهند

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}\boldsymbol{s}) = u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\cdot w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}})s_{\mathrm{q}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}} = u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{j}}s_{\mathrm{q}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}\ . \qquad (۲۶.۲)$$

بردارها می‌توانند در یک تانسور ضرب شده و یک بردار را نتیجه دهند. کاهش در مرتبه تانسور به علت استفاده مستقیم از «نقطه» در نمادگذاری است.

$$۱.\quad \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{T} = v_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{t}_{\mathrm{jk}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} = v_{\mathrm{i}}\mathrm{t}_{\mathrm{jk}}\delta_{\mathrm{ij}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} = v_{\mathrm{i}}\mathrm{t}_{\mathrm{ik}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} \qquad (۲۷.۲)$$

$$۲.\quad \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\cdot v_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\delta_{\mathrm{jk}}v_{\mathrm{k}} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \qquad (۲۸.۲)$$

(توجه نمایید که این ضرب‌ها، به شکل ساده $\boldsymbol{v}\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}\boldsymbol{v}$ نیز نوشته می‌شوند.)

در نهایت، دو تانسور می‌توانند در هم ضرب شده، یک تانسور را نتیجه دهند

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\cdot \mathrm{s}_{\mathrm{pq}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{p}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}\mathrm{s}_{\mathrm{pq}}\delta_{\mathrm{jp}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}} = \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}\mathrm{s}_{\mathrm{jp}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}\ . \qquad (۲۹.۲)$$

مثال ۲.۲

بردار $\boldsymbol{v}$ به‌صورت $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\hat{\boldsymbol{n}} + \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{a}\times\hat{\boldsymbol{n}})$ داده شده است که در آن $\boldsymbol{a}$ یک بردار دلخواه و $\hat{\boldsymbol{n}}$ یک بردار یکه است. $\boldsymbol{v}$ را برحسب بردارهای مبنای $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ بیان نموده، بسط داده و ساده کنید. (توجه نمایید که $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = n_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\cdot n_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{j}}\delta_{\mathrm{ij}} = n_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}} = ۱$.)

حل

برحسب بردارهای مبنا $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$، بردار $\boldsymbol{v}$ توسط معادله زیر بیان می‌شود

$$\boldsymbol{v} = (a_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\cdot n_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}})n_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} + n_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\times(a_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}}\times n_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}})\ .$$

در این جا توجه داریم که اندیس‌های i، j و k چهار مرتبه ظاهر می‌شوند، اما قرارداد جمع نقض نشده است. جملاتی که با علامت به‌اضافه یا منها مجزا شده‌اند، جملات متفاوت در نظر گرفته می‌شوند که روال قرارداد جمع، روی آن‌ها قابل استفاده است. بردارهایی که با ضرب نقطه‌ای یا برداری به هم مرتبط هستند، جملات مجزا نیستند و باید قرارداد جمع، روی آن‌ها برقرار باشد.

با اعمال ضرب‌های نشان داده‌شده، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= (a_i n_j \delta_{ij}) n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k + n_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \times (\varepsilon_{jkq} a_j n_k \hat{\boldsymbol{e}}_q)\\ &= a_i n_i n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k + \varepsilon_{iqm}\varepsilon_{jkq} n_i a_j n_k \hat{\boldsymbol{e}}_m\\ &= a_i n_i n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k + \varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq} n_i a_j n_k \hat{\boldsymbol{e}}_m\\ &= a_i n_i n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k + (\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) n_i a_j n_k \hat{\boldsymbol{e}}_m\\ &= a_i n_i n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k + n_i a_j n_i \hat{\boldsymbol{e}}_j - n_i a_i n_k \hat{\boldsymbol{e}}_k\\ &= n_i n_i a_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = a_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{a}\ .\end{aligned}$$

چون $\boldsymbol{a}$ باید مساوی با $\boldsymbol{v}$ باشد، این مثال نشان می‌دهد که بردار $\boldsymbol{v}$ می‌تواند به یک مؤلفه $(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\hat{\boldsymbol{n}}$ در امتداد $\hat{\boldsymbol{n}}$ و یک مؤلفه $\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{n}})$ عمود بر $\hat{\boldsymbol{n}}$ تجزیه شود.

مثال ۳.۲

با استفاده از معادله ۷.۲ نشان دهید که (الف) $\varepsilon_{mkq}\varepsilon_{jkq} = ۲\delta_{mj}$ و (ب) $\varepsilon_{jkq}\varepsilon_{jkq} = ۶$. (به یادآورید که $\delta_{kk} = ۳$ و $\delta_{mk}\delta_{kj} = \delta_{mj}$.)

حل

الف) معادله ۷.۲ (الف) را با جایگزینی اندیس i با k می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mkq}\varepsilon_{jkq} &= \delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}\\ &= ۳\delta_{mj} - \delta_{mj} = ۲\delta_{mj}\ .\end{aligned}$$

ب) با استفاده از معادله اول در قسمت (الف) و جایگزینی اندیس m با j خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jkq}\varepsilon_{jkq} &= \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{jk}\\ &= (۳)(۳) - \delta_{jj} = ۹ - ۳ = ۶\ .\end{aligned}$$

مثال ۴.۲

ضرب‌های دو نقطه‌ای[۱] دیادها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

۱ - Double Dot Product

الف) $(\boldsymbol{uv}) \cdot\cdot (\boldsymbol{ws}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s})$

ب) $(\boldsymbol{uv}) : (\boldsymbol{ws}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s})$.

این ضرب‌ها را بسط داده و شکل‌های مؤلفه‌ای آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

حل

الف) $(\boldsymbol{uv}) \cdot\cdot (\boldsymbol{ws}) = (v_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \cdot w_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}})(u_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} \cdot s_{\mathrm{q}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}) = v_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{i}}u_{\mathrm{k}}s_{\mathrm{k}}$

ب) $(\boldsymbol{uv}) : (\boldsymbol{ws}) = (u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \cdot w_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}})(v_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}} \cdot s_{\mathrm{q}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}) = u_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{k}}s_{\mathrm{k}}$

خلاصه‌ای از نمادگذاری نمادین

۱. جمع بردارها، معادله ۸.۲:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad \text{یا} \qquad w_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} = (u_{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{i}})\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$$

۲. ضرب:

الف) بردار با اسکالر، معادله ۹.۲:

$$\lambda\boldsymbol{v} = \lambda v_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$$

ب) ضرب نقطه‌ای (اسکالر) دو بردار، معادله ۱۱.۲:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = uv\cos\theta = u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{i}}$$

ج) ضرب برداری (ضربدری) دو بردار، معادله ۱۲.۲:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = (uv\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}} = \varepsilon_{\mathrm{ijk}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}$$

د) ضرب اسکالر سه‌گانه (ضرب جعبه‌ای)، معادله ۱۳.۲:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] &= u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \cdot (v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}} \times w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}) = u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{jkq}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}} \\ &= \varepsilon_{\mathrm{jkq}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\delta_{\mathrm{iq}} = \varepsilon_{\mathrm{ijk}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\end{aligned}$$

ه) ضرب برداری سه‌گانه، معادله ۱۴.۲:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \times (v_{\mathrm{j}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{j}} \times w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{k}}) = u_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \times (\varepsilon_{\mathrm{jkq}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}) \\ &= \varepsilon_{\mathrm{iqm}}\varepsilon_{\mathrm{jkq}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{m}} = \varepsilon_{\mathrm{miq}}\varepsilon_{\mathrm{jkq}}u_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{j}}w_{\mathrm{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

و) ضرب تانسوری دو بردار (دیاد)، معادله ۱۶.۲:

$$\boldsymbol{uv} = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i v_j\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j = u_i v_j\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j$$

ز) ضرب‌های بردار- دیاد، معادلات ۲۲.۲ تا ۲۵.۲:

۱. $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{vw}) = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot(v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k) = u_i v_i w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k$

۲. $(\boldsymbol{uv})\cdot\boldsymbol{w} = (u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j)\cdot w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k = u_i v_j w_j\hat{\boldsymbol{e}}_i$

۳. $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{vw}) = (u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\times v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j)w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k = \varepsilon_{ijq}u_i v_j w_k\hat{\boldsymbol{e}}_q\hat{\boldsymbol{e}}_k$

۴. $(\boldsymbol{uv})\times\boldsymbol{w} = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i(v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j\times w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k) = \varepsilon_{jkq}u_i v_j w_k\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_q$

ح) ضرب دیاد- دیاد، معادله۲۶.۲:

$$(\boldsymbol{uv})\cdot(\boldsymbol{ws}) = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i(v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot w_k\hat{\boldsymbol{e}}_k)s_q\hat{\boldsymbol{e}}_q = u_i v_j w_j s_q\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_q$$

ط) ضرب‌های بردار- تانسور، معادلات ۲۷.۲ و ۲۸.۲:

۱. $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{T} = v_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot \mathrm{t}_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j\hat{\boldsymbol{e}}_k = v_i \mathrm{t}_{jk}\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_k = v_i \mathrm{t}_{ik}\hat{\boldsymbol{e}}_k$

۲. $\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{t}_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot v_k\hat{\boldsymbol{e}}_k = \mathrm{t}_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\delta_{jk}v_k = \mathrm{t}_{ij}v_j\hat{\boldsymbol{e}}_i$

ی) ضرب تانسور- تانسور، معادله ۲۹.۲:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = \mathrm{t}_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot \mathrm{s}_{pq}\hat{\boldsymbol{e}}_p\hat{\boldsymbol{e}}_q = \mathrm{t}_{ij}\mathrm{s}_{jp}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_q$$

ک) ضرب دو نقطه‌ای:

$$(\boldsymbol{uv})\cdot\cdot(\boldsymbol{ws}) = (v_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot w_j\hat{\boldsymbol{e}}_j)(u_k\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot s_q\hat{\boldsymbol{e}}_q) = v_i w_i u_k s_k$$

$$(\boldsymbol{uv}):(\boldsymbol{ws}) = (u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot w_j\hat{\boldsymbol{e}}_j)(v_k\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot s_q\hat{\boldsymbol{e}}_q) = u_i w_i v_k s_k$$

۳.۲ نمادگذاری اندیسی

با اختصاص دادن معنای خاص به زیرنویس‌ها، **نمادگذاری اندیسی** امکان اجرای عملیات تانسوری جمع، ضرب، دیفرانسیل‌گیری و ... را می‌دهد، بدون اینکه بردارهای مبنای $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ در معادلات استفاده یا حتی ظاهر شوند. به‌طور ساده توافق می‌کنیم که رتبه (مرتبه) تانسوری یک عبارت، با تعداد زیرنویس‌های «آزاد[1]» مشخص گردد، یعنی زیرنویس‌هایی که بدون تکرار در آن عبارت ظاهرشده‌اند. بر این اساس یک عبارت با یک اندیس آزاد، یک بردار است، یک عبارت با دو اندیس

[1] - Free

جدول ۱.۲
شکل اندیسی برای کمیت‌های تانسوری مختلف.

λ	= اسکالر (تانسور مرتبه صفر) λ
v_i	= بردار (تانسور مرتبه اول) $\boldsymbol{v}$، یا به طول معادل، ۳ مؤلفه آن
$u_i v_j$	= دیاد (تانسور مرتبه دوم) $\boldsymbol{uv}$، یا ۹ مؤلفه آن
t_{ij}	= دیادیک (تانسور مرتبه دوم) $\mathbf{T}$، یا ۹ مؤلفه آن
Q_{ijk}	= تریادیک (تانسور مرتبه سوم) $\mathbf{Q}$، یا ۲۷ مؤلفه آن
C_{ijkm}	= تترادیک (تانسور مرتبه چهارم) $\mathbf{C}$، یا ۸۱ مؤلفه آن

آزاد، تانسور مرتبه دوم است و به همین ترتیب. معنای خاص این نمادها در جدول ۲.۱ بیان شده است.

برای تانسورهای تعریف‌شده در یک فضای سه‌بعدی، اندیس‌های آزاد به ترتیب مقادیر ۱، ۲ و ۳ را اختیار می‌کنند و می‌گوییم این اندیس‌ها دارای **دامنه**[۱] سه هستند. اگر تعداد اندیس‌های آزاد در یک تانسور، N باشد، آن تانسور ۳^{N} مؤلفه در فضای سه بعدی خواهد داشت.

باید تأکید کرد که در نمادگذاری اندیسی دقیقاً **دو نوع** زیرنویس ظاهر می‌شود:

۱. اندیس‌های «آزاد»، توسط حروفی بیان می‌گردند که فقط یک‌بار در یک عبارت واقع می‌شوند.

۲. اندیس‌های «جمع» یا «مکرر»، توسط حروفی بیان می‌گردند که فقط **دو بار** در یک عبارت ظاهر می‌شوند.

علاوه بر این، هر عبارت در یک معادله معتبر، باید حروف زیرنویس یکسانی برای اندیس‌های آزاد دارا باشد. هیچ حرف زیرنویسی نباید بیش از دو بار در هر عبارت داده‌شده، ظاهر گردد.

عملیات ریاضی روی تانسورها، به آسانی با استفاده از نمادگذاری اندیسی اجرا می‌شود. بنابراین جمع (و تفریق) بین تانسورهای با رتبه برابر، بر اساس معادلات نمونه، $u_i + v_i - w_i = s_i$ برای بردارها و $t_{ij} - v_{ij} + s_{ij} = q_{ij}$ برای تانسورهای مرتبه دوم دنبال می‌شود. ضرب دو تانسور برای

۱ - Range

جدول ۲.۲

شکل‌های ضرب‌های داخلی و خارجی.

ضرب‌های خارجی	ادغام (ها)	ضرب‌های داخلی
$u_i v_j$	$i = j$	$u_i v_i$ (ضرب نقطه‌ای بردار)
$\varepsilon_{ijk} u_q v_m$	$j = q, k = m$	$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$ (ضرب برداری بردار)
$\varepsilon_{ijk} u_q v_m w_n$	$i = q, j = m, k = n$	$\varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$ (ضرب جعبه‌ای)

ایجاد یک **ضرب تانسوری خارجی**، به سادگی با قرار دادن نماد تانسورها در کنار هم، بدون ظاهر شدن اندیس‌های مکرر صورت می‌پذیرد. به‌عنوان یک مثال شاخص، ضرب خارجی بردار v_i و تانسور t_{jk}، تانسور مرتبه سوم $v_i t_{jk}$ است. **ادغام**[۱]، فرآیند **یکی کردن** (یعنی مساوی یکدیگر قرار دادن) هر دو اندیس از یک عبارت تانسوری است. **ضرب تانسوری داخلی** از یک ضرب تانسوری خارجی با یک یا چند ادغام روی اندیس‌های تانسورهای مجزا در ضرب خارجی، تشکیل می‌شود. توجه نمایید که رتبه یک تانسور داده‌شده، به ازای هر ادغام **دو درجه** کاهش می‌یابد. تعدادی از ضرب‌های خارجی که با ادغام، ضرب‌های داخلی معروف را تشکیل می‌دهند، در جدول ۲.۲ آورده شده‌اند.

یک تانسور در هر دو اندیسی **متقارن**[۲] است اگر جابه‌جا کردن آن دو اندیس با یکدیگر، مقدار تانسور را تغییر ندهد. برای مثال، اگر $s_{ij} = s_{ji}$ و $c_{ijm} = c_{jim}$، هر دوی این تانسورها را در اندیس‌های i و j متقارن می‌نامند. یک تانسور، **پادمتقارن**[۳] (یا **متقارن مورب**[۴]) در هر دو اندیس است اگـر جابه‌جایی آن دو اندیس با یکدیگر، موجب تغییر علامت در مقدار تانسور شود. بنابراین اگـر $a_{ij} = -a_{ji}$، این تانسور در i و j پادمتقارن است. هم‌چنین به یادآورید کـه از تعریف، $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki}$ و غیره، ازاین‌رو نماد جایگشت در همه اندیس‌ها، پادمتقارن است.

مثال ۵.۲

نشان دهید که ضرب داخلی $s_{ij} a_{ij}$ برای یک تانسور متقارن $s_{ij} = s_{ji}$ و یک تانسور پادمتقارن $a_{ij} = -a_{ji}$ برابر صفر است.

۱ - Contraction

۲ - Symmetric

۳ - Anti-Symmetric

۴ - Skew-Symmetric

حل

طبق تعریف تانسور متقارن s_{ij} و تانسور پادمتقارن a_{ij}، داریم

$$s_{ij}a_{ij} = -s_{ji}a_{ji} = -s_{mn}a_{mn} = -s_{ij}a_{ij}$$

که دو مرحله آخر، حاصل از مکرر بودن همه اندیس‌ها است. بنابراین $2s_{ij}a_{ij} = 0$ یا $s_{ij}a_{ij} = 0$.

یکی از مهم‌ترین مزایای نمادگذاری اندیسی، فشردگی ایجادشده در بیان معادلات در سه بعد است. خلاصه‌ای از معادلات شاخص مکانیک محیط‌های پیوسته برای تشریح این ویژگی، در زیر ارائه شده است.

۱. $\phi = s_{ij}t_{ij} - s_{ii}t_{jj}$ (یک معادله، ۱۸ عبارت در طرف راست آن)

۲. $t_i = q_{ij}n_j$ (سه معادله، سه عبارت در طرف راست هر کدام)

۳. $t_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}$ (۹ معادله، چهار عبارت در طرف راست هر کدام)

مثال ۶.۲

با بسط مستقیم عبارت $v_i = \varepsilon_{ijk}w_{jk}$، مؤلفه‌های بردار v_i را برحسب مؤلفه‌های تانسور w_{jk} تعیین کنید.

حل

ابتدا با جمع روی j و سپس روی k و آنگاه حذف جملات صفر، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} v_i &= \varepsilon_{i1k}w_{1k} + \varepsilon_{i2k}w_{2k} + \varepsilon_{i3k}w_{3k} \\ &= \varepsilon_{i12}w_{12} + \varepsilon_{i13}w_{13} + \varepsilon_{i21}w_{21} + \varepsilon_{i23}w_{23} + \varepsilon_{i31}w_{31} + \varepsilon_{i32}w_{32} \ . \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} v_1 &= \varepsilon_{123}w_{23} + \varepsilon_{132}w_{32} = w_{23} - w_{32} \ , \\ v_2 &= \varepsilon_{213}w_{13} + \varepsilon_{231}w_{31} = w_{31} - w_{13} \ , \\ v_3 &= \varepsilon_{312}w_{12} + \varepsilon_{321}w_{21} = w_{12} - w_{21} \ . \end{aligned}$$

توجه نمایید که اگر تانسور w_{jk} متقارن بود، بردار v_i یک بردار تهی (صفر) است.

برای پایان این بخش، یک تانسور مرتبه دوم پادمتقارن $\mathbf{W} = w_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j$ را در نظر بگیرید. همه

تانسورهای پادمتقارن را می‌توان با استفاده از نماد جایگشت، برحسب یک **بردار محوری**[1] بیان کرد. بردار محوری w_{ij} را با ω_i به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_i = -\frac{۱}{۲}\varepsilon_{ijk}w_{jk} \ . \qquad (۳۰.۲)$$

یافتن معکوس معادله ۳۰.۲ تمرین ساده‌ای در به‌کارگیری اندیس‌ها است. w_{jk} را می‌توان برحسب ω_i به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{imn}\omega_i &= -\frac{۱}{۲}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}w_{jk} \\
&= -\frac{۱}{۲}(\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})w_{jk} \\
&= -\frac{۱}{۲}(w_{mn} - w_{nm}) \qquad (۳۱.۲) \\
&= -\frac{۱}{۲}(۲w_{mn}) \\
&= -w_{mn}
\end{aligned}$$

که در آن، از معادله ۷.۲ (الف) و خاصیت پاد تقارن w_{ij} استفاده شده است.

۴.۲ ماتریس‌ها و دترمینان‌ها

برای مقاصد محاسباتی، اغلب اقتضا می‌کند که از **بیان ماتریسی** بردارها و تانسورها استفاده شود. بر این اساس، در اینجا چند تعریف و عملیات از نظریه مقدماتی ماتریس‌ها را مرور می‌کنیم.

یک **ماتریس**، یک آرایش مستطیلی منظم از عناصر است که در بین کروشه محصور شده و تحت قوانین عملیاتی خاص قرار دارد. عنصر مشخصه $\mathcal{A}_{ij}$ از یک ماتریس در موقعیت سطر i ام (افقی) و ستون j ام (عمودی) در این آرایش قرار دارد. یک ماتریس با درایه‌های $\mathcal{A}_{ij}$ که می‌تواند اعداد، متغیرها، توابع یا هر یک از چندین ماهیت ریاضی باشد، با $[\mathcal{A}_{ij}]$ یا به‌صورت نمادین با حرف اصلی $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ مشخص می‌شود. یک ماتریس M در N (نوشته می‌شود $M \times N$) دارای M سطر و N ستون است و می‌توان به این صورت نشان داد

[1] - Axial Vector